Теорема 1. *Пусть R — неприводимая корневая система ранга r, L^+ — алгебра Ли типа R^+ над произвольным полем K и $f_1, \ldots, f_r$ — ее образующие элементы ($L_i = Kf_i$). Тогда для любых двух правильных путей $a = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ и $b = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, определяющих один корень (т.е. таких, что $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_m} = \alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_m}$), в L имеет место равенство*

$$2^{-u(a)} f_a = (-1)^{d(i_1, j_1)} 2^{-u(b)} f_b,$$

где $f_a = [\ldots[[f_{i_1}, f_{i_2}], f_{i_3}], \ldots, f_{i_m}]$, $u(a)$ — число особых индексов в a (аналогично определены f_b и $u(b)$), а $d(i_1, j_1)$ — расстояние между простыми корнями α_{i_1} и α_{j_1} в схеме Дынкина системы R. В частности, для всех $\alpha \in R^+$ имеем $\dim L_\alpha = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли. Гл.* VI (*Системы корней*). - М.: Мир, 1972.

М. И. Закиев, И. П. Семенов (Казань)

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В ряде прикладных задач встречается периодическая краевая задача

$$Kx \equiv x'(s) + a(s)\,x(s) + V(x; s) = y(s), \quad x(0) = x(2\pi), \tag{1}$$

где $a(s) \in C_{2\pi}$ и $y(s) \in L_2(0, 2\pi)$ — известные 2π-периодические функции, V — вполне непрерывный или малый по норме интегро-дифференциальный оператор.

Поскольку задача (1), как правило, точно не решается, то, следуя книге [1], предлагаем общий проекционный метод ее решения. Согласно этому методу приближенное решение ищется в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\, e^{iks}, \quad \alpha_k \in \mathbb{C},\ n + 1 \in N, \tag{2}$$

который определяется как точное решение конечномерного уравнения

$$K_n x_n \equiv P_n K x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n, P_n \in \mathbb{P}_n), \tag{3}$$

$$X_n = W_2^1(0, 2\pi) \cap H_n^T, \quad Y_n = L_2(0, 2\pi) \cap H_n^T,$$

где H_n^T — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n, а $\mathbb{P}_n = \{P_n\}$ — множество всех $N = (2n+1)$-мерных полиномиальных проекционных операторов в пространстве L_2.

Теорема 1. *Пусть* $P_n \in \mathbb{P}_n^{(1)} = \{P_n \in \mathbb{P}_n : \|P_n\|_{L_2 \to L_2} = O(1),\ n \to \infty\}$, *функции* $a(s), y(s) \in L_2$, *а* $V : W_2^1 \longrightarrow L_2$ - *вполне непрерывный оператор. Если краевая задача* (1) *имеет единственное решение* $x^*(s) \in W_2^1$ *при любой правой части* $y(s) \in L_2$, *то при всех* $n \in N$, *начиная с некоторого, уравнение* (3) *общего проекционного метода также имеет единственное решение. Приближенные решения* (2) *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в пространстве* W_2^1 *со скоростью*

$$\|x^*(s) - x_n(s)\|_{W_2^1} = O\left\{E_n\left(\frac{d}{ds}x^*(s)\right)_{L_2}\right\},$$

$$E_n(\varphi)_{L_2} = \rho(\varphi, H_n^T)_{L_2}, \varphi \in L_2.$$

Теорема 2. *Пусть* $P_n \in \mathbb{P}_n^{(2)} = \{P_n \in \mathbb{P}_n : \|P_n\|_{L_2 \to L_2} = \infty,\ \|P_n\|_{C_{2\pi} \to L_2} = O(1),\ n \to \infty\}$, *функции* $a(s), y(s) \in C_{2\pi}$, *а* $V : W_2^1 \longrightarrow C_{2\pi}$ - *вполне непрерывный оператор. Если краевая задача* (1) *имеет единственное решение* $x^*(s) \in W_2^1$ *при любой правой части* $y(s) \in L_2$, *то при всех* $n \in N$, *начиная с некоторого, уравнение* (3) *общего проекционного метода также имеет единственное решение* $x_n(s) \in H_n^T$. *Приближенные решения* (2) *при* $n \to \infty$ *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в пространстве* W_2^1 *со скоростью*

$$\|x^*(s) - x_n(s)\|_{W_2^1} = O\left\{E_n\left(\frac{d}{ds}x^*(s)\right)_C\right\},$$

$$E_n(\varphi)_C = \rho(\varphi, H_n^T)_{C_{2\pi}}, \varphi \in C_{2\pi}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

В. Н. Захаров (Самара)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается уравнение

$$U_{xyz}+\frac{\beta}{z-y-x}U_{xy}-\frac{\alpha}{z-y-x}U_{xz}=0,\qquad 0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<1 \tag{1}$$

в области $H=\{(x,y,z):0<x,y,z<+\infty, x+y<z\}$.

Задача А. *Найти функцию* $U(x,y,z)$ *со следующими свойствами:*

1) $U(x,y,z)\in C^2(\bar{H})\cap C^3(H)$;

2) $U(x,y,z)$ является решением уравнения (1);

3) функция $U(x,y,z)$ удовлетворяет краевым условиям

$$U(x,y,x+y)=\phi(x,y),\qquad 0\le x,y<+\infty,$$

$$(U_x+U_y-U_z)|_{z=x+y}=\psi(x,y),\qquad 0<x,y<+\infty,$$

$$U(0,y,z)=f(y,z),\qquad 0\le y\le z<+\infty. \tag{2}$$

При доказательстве существованя и единственности решения этой задачи используется решение задачи Коши для уравнения (1), полученное автором

$$U(x,y,z)=\phi(z-y,y)+k_1\int\limits_x^{z-y}dt\int\limits_y^{z-t}[\phi_s(t,s)-2\phi_t(t,s)-\psi(t,s)]\times$$

$$\times(s-y)^{\beta-1}(z-y-t)^{1-\alpha-\beta}(z-t-s)^{\alpha-1}ds+$$